
Aufgabe 1 *(Zentralkraftfelder)*
Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie für das rotationssymmetrische Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ F(x) = f(r)x \quad \text{mit } r(x) = |x|$$

ein Potential.

Aufgabe 2 *(Gradientenfelder)*
Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektorfelder Gradientenfelder sind. Wenn ja, geben Sie alle Stammfunktionen an.

(1) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = (xy, x^2/2)$.

(2) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = (y, 0)$.

(3) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ F(x, y, z) = (x, xz, xy)$.

(4) $F : \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\},\ F(x, y) = (1/x^2 + 1/y^2)(-y, x)$.

Aufgabe 3 *(Konjugierte harmonische Funktionen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, das heißt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Zeigen Sie, dass es eine harmonische Funktion $v \in C^2(\Omega)$ gibt mit

$$\operatorname{grad} v = J \operatorname{grad} u, \qquad \text{wobei } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 *(Wegunabhängigkeit)*
Sei $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ Vektorfeld mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$. Zeigen Sie: ist $\gamma \in C^2([a, b] \times [0, 1])$ eine Schar geschlossener Kurven, also $\gamma(a, t) = \gamma(b, t)$, so gilt

$$\int_{\gamma(\cdot,0)} F \cdot \vec{ds} = \int_{\gamma(\cdot,1)} F \cdot \vec{ds}.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 1.7.2013, vor der Vorlesung.